Concursul "Grigore Moisil" Urziceni

Ediţia a V-a, 30 ianuarie - 1 februarie 2009

CLASA A IX-A

Subiectul 1.

Fie a, b, c, x, y, $z \in (0, \infty)$ astfel ca $a^2 + b^2 = c^2$ şi $x^2 + y^2 = z^2$. Arătaţi că

$$(a + x)^2 + (b + y)^2 \leq (c + z)^2 .$$

* * *

Subiectul 2.

Scrieţi numărul $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$ sub forma $\dfrac{a+b\sqrt{c}}{d}$, cu a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$.

* * *

Subiectul 3.

Determinaţi $a \in \mathbb{N}^*$ şi b, c, $d \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left|ax^3 + bx^2 + cx + d\right| \leq 2 \quad , \quad \text{oricare ar fi } x \in [-2, 2] .$$

Cristinel Mortici

Subiectul 4.

Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ΔABC se consideră punctele D şi respectiv E, astfel încât $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$. Fie T intersecţia dreptelor DC şi BE. Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \alpha \cdot \overrightarrow{TA}$.

Gazeta Matematică

Concursul "Grigore Moisil" Urziceni

Ediţia a V-a, 30 ianuarie - 1 februarie 2009

CLASA A X-A

Subiectul 1.

Rezolvaţi în numere complexe sistemul: $\begin{cases} z+w=4 \\ (z^2+w^2)(z^3+w^3)=280 \end{cases}.$

* * *

Subiectul 2.

Se consideră funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$.
a) Demonstraţi că f este crescătoare pe $[-1,0]$ şi descrescătoare pe $[0,1]$.
b) Rezolvaţi ecuaţia $f(x)=\sqrt{2}+\log_2 x$.

Cristinel Mortici

Subiectul 3.

Fie a, $b\in(0,\infty)$ cu proprietatea că $ab=10^{\sqrt{2}}$. Arătaţi că $\lg^2 a+\lg^2 b\geq 1$. Când are loc egalitatea?

Revista Minus

Subiectul 4.

Fie a, $b\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ şi funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definită prin $f(z)=az+b$. Demonstraţi că dacă punctele de afixe z_1, z_2, z_3 sunt coliniare, atunci şi punctele de afixe $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_3)$ sunt coliniare.

Gazeta Matematică

Concursul "Grigore Moisil" Urziceni

Ediţia a V-a, 30 ianuarie - 1 februarie 2009

CLASA A XI-A

Subiectul 1.
a) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+...+a_n\sin nx$, unde a_1, a_2, ..., $a_n\in\mathbb{R}$ sunt numere fixate. Demonstraţi că dacă $|f(x)|\le|\sin x|$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, atunci $|a_1+2a_2+...+na_n|\le 1$.
b) Arătaţi că pentru orice numere reale $x_1<x_2$ şi $y_1<y_2$, avem:

$$\begin{vmatrix} e^{x_1y_1} & e^{x_1y_2} \\ e^{x_2y_1} & e^{x_2y_2} \end{vmatrix} > 0.$$

* * *

Subiectul 2.

Fie a_0, $b_0\in(0,\infty)$ şi pentru orice $n\in\mathbb{N}$, definim:

$$a_{n+1}=\frac{(a_n+2b_n)^2}{(a_n+b_n)^2} \quad , \quad b_{n+1}=\frac{(a_n+2b_n)b_n}{(a_n+b_n)^2}.$$

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

* * *

Subiectul 3.

Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 21 & 0 & 3 \\ -22 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ şi presupunem că $A^{2009}=\begin{pmatrix} m & a & b \\ x & n & c \\ y & z & p \end{pmatrix}$.

a) Determinaţi α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^3-\alpha A^2+\beta A-\gamma I_3=0_3$.
b) Demonstraţi că $m=p$ şi $a+b+c=x+y+z$.

Cristinel Mortici

Subiectul 4. Calculaţi: $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k^2+8k+15}{k^2+8k+12}$.

Gazeta Matematică

Concursul "Grigore Moisil" Urziceni

Ediţia a V-a, 30 ianuarie - 1 februarie 2009

CLASA A XII-A

Subiectul 1.

Fie $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, cu f'' continuă, astfel încât $f(3) = 2$, $f'(3) = 1$ şi $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x = 6$. Calculaţi $\displaystyle\int_0^3 x^2 f''(x)\,\mathrm{d}\,x$.

* * *

Subiectul 2.

Determinaţi funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$(f(x))^{2009} = \int_0^x (f(t))^{2008}\,\mathrm{d}\,t\ , \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Cristinel Mortici

Subiectul 3.

Determinaţi toate tripletele de numere complexe $(p,\ q,\ r)$ astfel încât

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^3 + pz^2 + qz + r = 0 \right\} \subset \mathbb{C}^*$$

să fie grup în raport cu înmulţirea numerelor complexe.

Revista Minus

Subiectul 4.

Calculaţi: $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(3+x^2)(1+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}\,x.$

Gazeta Matematică

 Subiectele sunt elaborate de Cristinel Mortici